

隨機遞推結構上的相變與分析

中央研究院統計研究所 黃顯貴

當溫度增加到沸點以上時，水會變成蒸汽。而當溫度下降到冰點以下時，水會結成冰塊。這種冰 ↔ 水 ↔ 蒸汽間形態隨溫度改變的現象，為眾所週知的相變。在數學上，某個函數（或隨機變數）隨著某些變數改變，而有截然不同行為的現象，亦通稱為相變。本文主要目的，在將我們過去數年所研究過的相變現象，作一簡單的回顧與整理。藉由這些問題，說明我們研究相變的動機、目的與方法。並進而闡釋一般相變現象之研究，為具極高興趣的研究方向。

我們所研究過的相變現象，可約略歸成兩大類：

1. 與卜松 (Poisson) 分布相關的相變；
2. 與快速排序法 (Quicksort) 有關的相變。

底下將描述這些相變，其對應的解析問題及使用的分析工具，並嘗試做可能的解釋。最後亦提出出相關的懸題 (open problem)。

一、與卜松分布相關的相變

卜松分布 (Siméon Denis Poisson, 1781-1840) 最常以稀有事件定律的形式出現，它幾乎是實用問題裡最容易被聯想，被用來做基本模型的一個離散分布。其定義為：若 X_λ 為一卜松(λ)分布

$$\text{則 } P(X_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

其中 $\lambda > 0$ 。這個分布被應用的層面極廣。舉例而言，聚會中生日相同的人數、公路上車禍死亡的人數、或單位時間內顧客人數，皆與卜松分布有關 (見[8,9,15])。這個分布有很多漂亮的性質。與本文有關者如下列[10]：

(i) 若 $m \geq 0$ 滿足 $\lambda - m \gg \sqrt{\lambda}$

(“當 $\lambda \rightarrow \infty$ 時 $\frac{\lambda - m}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow \infty$ ”)，則

$$P(X_\lambda \leq m) \sim \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{1}{1 - m/\lambda} (\lambda \rightarrow \infty):$$

($a_\lambda \sim b_\lambda$ 表 $\frac{a_\lambda}{b_\lambda} \rightarrow 1$ ，當 $\lambda \rightarrow \infty$)；

(ii) 若 $m = \lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor$ ，其中 $x = o(\lambda^{1/6})$ ，

$$P(X_\lambda \leq m) \sim \phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt;$$

(iii) 若 $m - \lambda \gg \sqrt{\lambda}$ ，則 $P(X_\lambda \leq m) \sim 1$ 。

這個看似平淡的結果其實很有趣。它反映出卜松分布的漸近走勢。更重要的是這樣的三相行為在很多結構上，以極類似的方式呈現。這便是所謂現象的共通或普遍性 (universality)。換另一個角度來看，這也是為何“簡單便是美”的精神之一。再仔細地看看這個結果。當 m 小時 (相對於 λ)，這個結果可以寫成

$$P(X_\lambda \leq m) \sim P(X_\lambda = m) \cdot \frac{1}{1 - m/\lambda}。$$

這意謂著最大項對整個分布貢獻有滿大的比重。而當 m 在平均值附近 (區間大小以標準差 $\sqrt{\lambda}$ 來作衡量單位)，卜松分布趨近一常態分布。當 m 繼續往右增加時，整個分布便收斂到 1。從相變的角度來看，當 m 從 0 開始變大時，卜松分布便從 0 開始增加，最後趨近於 1。而中間的銜接，乃是靠常態分布函數來達成。於是古典中央極限定理，亦可以視為一相變現象；其中常態分布被用來作為 0 與 1 溝通的橋樑。它不但比較精確，也引出了更多細化的問題，以釐清更多隱含的現象。

證明中央極限定理需要比 0-1 法則更細的工具。於是這又引出了一個重要的概念：現象的觀察 (或發現) 端視解析工具之犀利程度。這個概念底下會一直重複出現。它與觀察星象時，望遠鏡倍數大小之影響有著異曲同工之妙。

1.1 高維單位方塊 $[0,1]^d$ 中極大點個數：卜松

→ 常數

多維資料點沒有絕對的大小關係。任兩點要作比較，必須先將所謂的“偏序”(partial order)定義出來，才有大小的概念。在多維資料上一個常用、且最自然的偏序，便是底下所謂的輸贏 (dominance) 偏序：給定兩點 $A=(a_1, \dots, a_d)$ ， $B=(b_1, \dots, b_d)$ 。如果對所有的 $i=1, \dots, d$ ， $a_i > b_i$ ，則我們說 A 贏過 B。一個樣本集中，所謂的極大點，便是沒被其他點贏過的那些點。這種偏序在很多領域上，如工程、經濟、作業研究、社會學、計算幾何等極為有用。舉例而言，甲學生若每科成績皆優於乙學生，則甲生的學業成績自然比乙生的成績好。這個解釋似乎多此一舉，但較有用的是如果某生數學 100 分，其它學科皆掛零。則此生不應該算“劣等生”(從輸贏偏序來看，此生屬於極大點)。這種看法對於此類學生，有較具輔助性的正面教育參考意義。

現在假設我們自 $[0,1]^d$ 中隨機挑出 n 個點(獨立、均勻、同分布)，再去計算這 n 個點中極大點的個數。令此變數的平均值為 M_{nd} ，則

$$M_{nd} = \sum_{1 \leq k \leq n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} k^{-d+1} \quad (1)$$

問題：若 d 隨 n 變動時， $n \rightarrow \infty$ ， M_{nd} 的漸近行為如何變化？

首先，為何研究此問題？此乃實用上 n 與 d 皆為有界。所以當 $n=10^4$ 且 $d=10$ 時，我們不知道 d 是 $O(n^{1/4})$ 或 $O(\log n)^2$ 或是 $O(1)$ 。於是我們必須較精確地去描述當 $n \rightarrow \infty$ ，且 d 隨著 n 的不同等級增加時， M_{nd} 的漸近變化行為。這是一般所謂“均勻漸近分析”，其研究動機主要來自實用上的刺激。

其次，若我們細看 (1) 式，可以發現 -1 在整個作和中，扮演了極大的抵銷角色。例如 $d=2$ 時，我們可以證明

$$M_{n2} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \sim \log n \quad .$$

所以，雖然單一項可以很大 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}}$ (指數階)，但由於 -1 在整個和中作怪，於是整體

剩餘量僅有對數階。這意味著，雖然這個和是確切的表達式，實用上當 n 很大時，其用途卻極有限(極大的抵銷會產生不可避免的數值誤差)。於是我們需要較簡單、且有效的漸近式。

可以證明 M_{nd} 有如下的複積分表達式。

$$M_{nd} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r<1} z^{-d} \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{1-z/j} dz \quad .$$

接著，利用一些複變漸近分析手法，我們可以導出，對於所有的 d

$$\frac{M_{nd}}{n} \sim \Gamma(2-\rho) P(X_n < d) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2)$$

其中 $\rho = \min\{1, \frac{d-1}{\log n}\}$ ， Γ 是伽瑪函數，

X_n 是一卜松 ($\log n$) 分布。於是，利用卜松分布的漸近逼近式，我們得到

$$\frac{M_{nd}}{n} \sim \begin{cases} \frac{(\log n)^{d-1}}{n(d-1)!} \Gamma(1 - \frac{d}{\log n}), & \text{當 } \log n - d \gg \sqrt{\log n}; \\ \Phi(x), & \text{當 } d = \lfloor \log n + x\sqrt{\log n} \rfloor; \\ 1, & \text{當 } d - \log n \gg \sqrt{\log n}. \end{cases}$$

這個結果直觀上也合理：當 d 很大時，極大點的個數接近 n (考試科目非常多時，要每科都贏過某人的機率也較低)。只是“相變發生在 $d \sim \log n$ 附近”這個性質直觀上並不易猜測。同時我們也自然要問，為何 M_{nd}/n 與卜松分布如此接近呢？有沒有更直觀的解釋？另外對於 (2) 式有沒有較機率 (而不是用複變分析) 的證明呢？這些都是很有趣的研究方向；相關研究結果請參閱 [1,2]。

值得一提的是，我們由此結果可看出用離散分布來逼近離散問題，可得到頗為均勻的結果。這個現象也有其一般性。

1.2 有限體上隨機多項式的質因式個數：卜松 → 負二項分布

給定一個有限體 F_q ，其中 q 是一個質數的幕次方。考慮其上領導係數為 1 的多項式。設若所有 q^n 個這種多項式都等機率給出，則隨機抽取出的多項式，作質因式分解後，質因數個數 Y_n 分布為何呢？

我們有如下的關係式

$$\sum_{n \geq 0} q^n P(Y_n = m) y^m z^n = \prod_{j \geq 1} \left(\frac{1}{1 - yz^j} \right)^{I_j},$$

$$\text{其中 } \sum_{n \geq 1} I_n z^n = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log \frac{1}{1 - qz^k},$$

$\mu(k)$ 是所謂的莫比斯 (Möbius) 函數： $\mu(n) = 0$ ，若 n 有重覆的質因數；否則 $\mu(p_1 p_2 \dots p_k) = (-1)^k$ 。由這個二元生成函數出發，再透過一些複變分析的手法，我們可以證明，當 m 小時 ($q \log n - m \gg \sqrt{\log n}$)， $P(Y_n = m)$ 走勢大約像卜松 ($\log n$) 分布；當 m 很大時 ($m - q \log n \gg \sqrt{\log n}$)， $P(Y_n = m)$ 約略像一負二項分布 (參數為 q 和 $1/q$)；這兩個範圍的連接，靠的是所謂拋物柱狀函數 (parabolic cylinder function)

$$\frac{e^{-x^2/2}}{\Gamma(q)} \int_0^\infty t^{q-1} \exp(-xt - \frac{t^2}{2}) dt.$$

由於結果稍嫌複雜，在此不將算式列出[11]。此文亦導出一卜松與一負二項分布的對合律，這個對合律使得我們可以給出一個對 $P(Y_n = m)$ 更均勻的逼近式。同時，從分析角度上看，我們所碰到的積分類型，是所謂移動的鞍點加上 q 次的奇異點 (pole)；而麻煩的是，這兩個點當 m 移動時，會互相重疊在一起。於是，我們需要較細膩的分析與較有效的工具來處理。這個例子說明，在一般的問題上，相變的精確描述，需要較複雜的函數與較深入的解析技巧。類似 (而較簡單) 的現象，也出現在隨機整數的質因數個數分布[12]，與其它隨機組合結構上[13]。

1.3 獨立同分布隨機變數上的連續空前大個數：卜松 \rightarrow 非卜松

一個數列的空前大 (或破紀錄) 指的是那些數值大於所有位於其前者。而連續 r -空前大指的是在此序列中， r 個相連數皆為空前大。問題：給定一獨立同分布的連續隨機變數序列 X_1, X_2, \dots, X_n ，固定 $r \geq 1$ 。令 Y_{nr} 表此序列中連續 r -空前大的個數 (重疊者重覆計算)，則 Y_{nr} 的漸近分布為何？

這個問題在 $r = 1$ 時為一機率上的老問題，結果也是已知。首先其機率生成函數為

$$E(y^{Y_{n1}}) = \prod_{1 \leq j \leq n} \left(1 + \frac{y-1}{j} \right).$$

從而我們可證明 [14]： $Y_{n1} \sim \text{Poisson}(\log n) \sim N(\log n, \log n)$ ，其中 $N(a, b)$ 表平均值為 a ，變異數為 b 的常態隨機變數。

當 $r \geq 2$ 時，令 $F_{n,r}(y) = E(y^{Y_{nr}})$ 。則

$F_{n,r}(y)$ 滿足如下的遞推式：若 $n < r$ 時，

$F_{n,r}(y) = 1$ ；當 $n \geq r$ 時，

$$F_{n,r}(y) = \frac{n+y-1}{n} F_{n-1,r}(y) + (1-y) \sum_{2 \leq j \leq r} \frac{(n-j)F_{n-j,r}(y)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}.$$

從這個遞推式，我們可以得出以下的微分方程：

$$(1-z)f^{(r)} = (r-(1-y)(1-z))f^{(r-1)} + (1-y) \sum_{1 \leq j < r} (z+j)f^{(j)},$$

$$\text{其中 } f(z) = \sum_{n \geq 0} E(y^{Y_{n,r}}) z^n.$$

藉由對這個方程的分析，我可以得出 $F_{n,r}(y)$ 的漸近行為 (當 $n \rightarrow \infty$ ， y 有界)。然後導出 $Y_{n2} \sim \text{Poisson}(1)$ ，以及當 $r \geq 3$ 時， $Y_{nr} \sim Y_r$ ，其中 Y_r 不是 Poisson。

那麼 Y_r 到底是什麼呢？目前僅證明 $E(y^{Y_r})$ 為一全解析函數 (entire function)。且在 $r=3$ 時，可以藉由所謂的匯合超幾何函數 (confluent hypergeometric function) 來完全表示。理論上在 $r \geq 4$ 時，我們也有複積分來表示 $E(y^{Y_r})$ ，但這種表達式很難令人滿意，是以如何進一步刻畫 Y_r ($r \geq 4$) 為一懸題。

當然值得一提的是，不管如何刻畫， Y_r 在 0 取值的機率，以很快的速度趨近 1 (這意味著當 r 增加時，要找到連續 r 空前大的機率趨近 0)。例如 $P(Y_{10} = 0) = 0.999997213\dots$ 。以一般相變的角度而言，這個例子雖然稍嫌牽強，但其所自然引出的現象、問題與挑戰均極具代表性。

二、與快速排序法相關的相變

先介紹快速排序法。這是個將數列從小排到大 (或從大排到小) 的算法。它最早由 Hoare 在 1962 年提出，至今約略 40 年，且一直是計算機上使用的最廣泛、研究的最深入的排序

法。它的重要性可由其名列 20 世紀十大最具科技發展影響力算法中[7]可見一般。這個算法具備了簡單與效率兩大本錢，使得相關研究（理論與實務）歷久不竭。

這個算法最簡單的版本約略如下：要將 n 個數排序，先任取一數作為比較的標竿，再將所有數與此標竿比較，比較小的放一堆，比較大的放另一堆；於是，作完此一步驟後，該標竿放定位，再用同樣的方法，遞迴地排序較小與較大那兩堆，直到每堆僅剩一數為止。

想要瞭解這個算法的效率，最簡單的便是假定我們所要排序的數列，來自一獨立之同分佈隨機序列（有一共同的隨機連續分佈），然後去計算快速排列法的工作量（比較次數、交換次數等）。

讀者不免要問：獨立同分佈的假定是否太過“烏托邦”而不切實際？

這是一個相當一般的問題，我們可以從幾個角度來看。首先，獨立同分佈雖然是一極度理想化的模型，它所提供的較原型的結果，除了作為實用上快速參考外，經常在更廣的模型上也成立。當然，數學上能否處理更一般的模型，則是另一個層面的問題。

理論模型的另一個好處是它與不同的機器、不同的程式碼、不同的操作者等無關。實用上的序列可以千奇百怪，理論模型則有點“以不變應萬變”之勢，來預測實用上可能產生的行為與變異。

假定我們接受上述的模型論點，則快速排序法的工作量 Y_n （假設序列隨機性不因拆解問題而被破壞）滿足 $Y_0 = 0$ ，以及，當 $n \geq 1$ 時 $Y_n = Y_{I_n} + Y_{n-1-I_n}^* + T_n$ ，其中 $Y_n = Y_n^*$ 。

這個式子說 Y_n 的分佈與右邊三量之和的分佈相同，其中 T_n 為拆解問題所耗之工作量， I_n 在最簡單的情況下是一 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上的均勻分佈。 Y_n 的隨機漸近分析，在文獻上有廣泛的研究，這裏介紹兩種類型的相變：

1. 第一型相變：當我們固定 T_n （比如說 $T_n \equiv 1$ ），讓 I_n 改變時，得出極限分佈由常態變成不存在。
2. 第二型相變：當我們固定 I_n （比如說 $I_n \sim \text{Uniform}[0, n-1]$ ），讓 T_n 變動，則極限分佈由常態變成非常態。

這兩型相變有點類似統計物理上的相變分類，其中第一型是離散型，第二型是連續型。

2.1 第一型相變：常態 \rightarrow 無極限分佈

先來看我們的第一型相變，一個簡單、變動 I_n 的實例是所謂的“奇樣本中值法”來選取標竿。這個方法主要在改善快速排序法中標竿的選取品質：與其隨便取，不如稍花些功夫，挑出一個奇數樣本（大小為 $2t+1$, $t \geq 1$ ），再以此小樣本中的中值（median-of- $(2t+1)$ ）來作標竿，將原序列如快速排序法般分成兩堆，再以同樣方法遞推排序之。

如果我們想了解“奇樣本中值法”這個步驟總共用了多次，則這個量滿足 $Y_n = 0$ ($n \leq 2t$)

$$\text{及 } Y_n = Y_{I_n} + Y_{n-1-I_n} + 1 \quad (n \geq 2t+1);$$

$$P(I_n = k) = \binom{k}{t} \binom{n-1-k}{2t+1}.$$

有趣的結果是（參閱[3]）：當 $1 \leq t \leq 58$ 時

$$\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\text{Var}Y_n}} \rightarrow N(0, 1) \quad ; \text{當 } t > 58 \text{ 時 } \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\text{Var}Y_n}}$$

的極限分佈不存在。

看到這個結果，大多數人的第一個問題是為什麼會這樣？為什麼是 58？解析上來看，這個現象與所謂指標多項式（indicial polynomial） $(z+t) \cdots (z+2t) - (2t+2)! / (t+1)!$ 的第二大根（以實部來排大小）位置有關（或是某個對應矩陣的第二大特徵根位置）。這個根記作 α ；若 α 小於 1.5（當 $1 \leq t \leq 58$ ），則 Y_n 的期望值滿足 $EY_n = \mu n + O(n^{1/2-\epsilon})$ ，而變異數滿足 $\text{Var}Y_n \sim \sigma^2 n$ 。於是， Y_n 漸近上趨近一常態分布。當 $\alpha > 1.5$ 時（ $t > 58$ ），

$$\begin{cases} EY_n \sim \mu n + P_1(\log n) n^{\alpha-1}, \\ \text{Var}Y_n \sim P_2(\log n) n^{2\alpha-2}, \end{cases}$$

其中 $P_1(u)$ 與 $P_2(u)$ 為有界的週期函數。特別注意：當 $\alpha > 1.5$ 時， $2\alpha - 2 > 1$ 。所以變異數比平均值來得大；再加上週期函數的循環作用，於是 $\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\text{Var}Y_n}}$ 的極限分佈不存在。實際上

$$\text{我們證明 } E \left(\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\text{Var}Y_n}} \right)^k \sim P_k(\log n) \quad k \geq 2,$$

其中 P_k 是非常複雜的週期函數。這些 P_k 間由於不滿足簡單的形式，所以極限分布不存在。

以上是較解析的解釋，有沒有較直觀的說法呢？當然要以直觀的方式來說明 $t = 58$ 前後有明顯相變，並不太可能，因為對這個問題而言，58 是精確分析下的產物。不過，底下的說法大概可以給出一粗淺的描繪。

如果我們仔細看 Y_n 的定義，要計算 Y_n 的分布，必先算其前的分布，如此遞推下去，所有的計算基本上都回到 $Y_n (0 \leq n \leq 2t)$ 上，而這些 Y_n 是退化的隨機變數，它們只取 0 這個常數。當 n 變大時， Y_n 可看成是許多退化隨機變數與 1 的線性組合。於是當 t 增大時，相變自然產生。

這個說法可以再描述得更清楚些。根據定義，當 $0 \leq n \leq 2t$ ， $Y_n = 0$ ；當 $2t+1 \leq n \leq 3t+1$ 時， $Y_n = 1$ ；當 $3t+2 \leq n \leq 4t+2$ 時， Y_n 取 1 或 2；當 $4t+3 \leq n \leq 5t+3$ 時， Y_n 取 2 或 3；依此類推，我們可以發現 Y_n 的計算，每次都是以一個長度為 $t+1$ 的區塊來向上延伸。這個區塊式的遞迴性質，基本上是所有動差 (moment) 漸近展式中，週期函數的產生根源，而這些週期函數則是相變發生的活水源頭。我們可以證明：若可以有效的消除平均值展式第二項的週期函數，則極限分布存在 (但不是常態)。

這個相變只是冰山一角，理論上，我們可以系統地製造出在任何數字上的類似相變現象；[3,5]。一個有趣、值得一提的例子是如下的隨機變數：假定 $m \geq 3$ ，定義 $Y_0 = 0$ ； $Y_1 = 1$ ， $1 \leq n \leq m-1$ ，當 $n \geq m$ 時，

$$Y_n = Y_{J_n^{[1]}} + \dots + Y_{J_n^{[m]}} + 1,$$

$$\text{其中 } Y_n^{[1]} = \dots = Y_n^{[m]}$$

$$P(J_n^{[1]} = j_1, \dots, J_n^{[m]} = j_m) = 1/\binom{n}{m-1},$$

Y_n 所代表的是隨機多分支樹 (分支度是 m) 所須儲存空間。這個隨機變數在 $3 \leq m \leq 26$ 時，極限分布為常態；當 $m > 26$ 時，極限分布不存在。

這些相變的刻劃須要對遞推方程的特性有清楚掌握、再配合精確的漸近分析，以及所謂的動差法。動差法之所以在這類問題上特別有

用，原因在於所有的動差 (不管是否標準化) 都滿足同一類型的遞推式，這些遞推式在漸近分析上，較原來機率生成函數的遞推式容易處理，於是，我們只須集中精力處理遞推式在所有可能的情形下，漸近行為如何隨著不同的 non-homogeneous 項，所有動差的漸近行為，便可在同一架構下整合處理。

動差法雖然在很多問題上，皆是不得已的辦法。但在遞迴隨機變數上却有許多好處，除了上述特性外，另一個特點是在某些情況下，我們可以細化此法，得到分布函數的收斂速度及局部極限定理 (local limit theorem)。

而這些更深層結果又再反映出另一層的相變；例如，在“奇樣本中值法”問題中我們可以證明若 $1 \leq t \leq 43$ 則 (見[16])

$$\sup_x |P\left(\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\text{Var}Y_n}} < x\right) - \Phi(x)| = O(n^{-1/2});$$

若 $44 \leq t \leq 58$ 則

$$\sup_x |P\left(\frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{\text{Var}Y_n}} < x\right) - \Phi(x)| = O(n^{-3(\alpha-3/2)});$$

其中 α (如前述) 為 $(z+t) \cdots (z+2t) - (2t+2)! / (t+1)!$ 的第二大根。表 1 列出當 t 由 44 變到 58 時， $3(\alpha - 3/2)$ 的變化。這個結果再度反映出“工具的犀利程度與能觀察的現象成正比”。

表 1

t	α	$3(3/2-\alpha)$	t	α	$3(3/2-\alpha)$
44	1.33764	0.48705	52	1.43798	0.18603
45	1.35210	0.44368	53	1.44843	0.15469
46	1.36594	0.40217	54	1.45850	0.12449
47	1.37920	0.36238	55	1.46820	0.09537
48	1.39192	0.32422	56	1.47757	0.06728
49	1.40413	0.28760	57	1.48661	0.04015
50	1.41586	0.25241	58	1.49534	0.01395
51	1.42713	0.21858	59	1.50378	< 0

2.2 第二型相變：常態 \rightarrow 非常態

$$\text{考慮 } Y_n = Y_{I_n} + Y_{n-1-I_n}^* + T_n,$$

其中 $I_n = \text{Uniform}[0, n-1]$, $Y_n \stackrel{d}{=} Y_n^*$ 。

問題：當 T_n 變動時， Y_n 的漸近分布如何隨之變化呢？

直觀上看來，如果 T_n 的平均取值不大，則 Y_n 約略可視為很多小變數的和，根據中央極限定理的精神，我們預期 Y_n 應是漸近常態。反之，若 T_n 的平均取值較大，則單一 T_n 項對總 Y_n 的貢獻可能占一固定比例，於是 Y_n 的極限分布若存在，應該不是常態。這個直觀描述的方式可以用更一般的字眼來類比：當 T_n 不大時，我們大約處在一民主社會，其中每張選票（或每個選民）對大的系統或政體，或多或少有著相同的貢獻。整體而言，系統是可以較“常態”的方式來發展；反之，若少數人對整個系統有過多的介入或影響（像獨裁或其它專制政體），則系統可能有較大的變異性（特別是當政權轉移時）。

上述的直觀，回到比較數學的語言時，可以約略描述如下：當 $ET_n = O(\sqrt{n} L(n))$ 其中 $L(n)$ 是一平緩函數 (slowly varying function) 如 $(\log n)^k$ 或 $\exp(\log \log n)^{1-\epsilon}$ 時，再加上些許條件， Y_n 的分布是漸近常態(參閱[17])。另一方面，當 $ET_n \gg \sqrt{n}$ 時，在適當條件下， Y_n 的極限分布存在但不再是常態。我們可以看出， \sqrt{n} 大約是一分水嶺，它區分了常態與非常態。當然，這個結果可以再細化，如果我們進一步用更細的“顯微鏡”去“照射”，可以得到 $n^{1/3}$ 是好的收斂速度與差的收斂速度的分水嶺 [16]。

三、結論

相變現象幾乎無所不在，小到物種的突變，大到改朝換代，或滄海桑田；從文章的啟承轉合到所謂的合久必分、分久必合。它真正的意涵與描述完全因觀察者（或研究者）對尺度大小的掌控。在數學上，分析工具的犀利與適用程度，決定了相變是否能被觀察（這與顯微鏡倍數大小可決定粒子是否可見，有異曲同工之處）。觀察到相變後，接踵而來的問題是如何描述？為何有相變？以及此種相變有否一般性？有沒有更進一層的相變（更大倍數的顯微鏡能看到更細的生物）？直觀上如何解釋？這些

問題所牽連的經常是不同層次的問題，有的容易，有的難，研究者必須嘗試站在不同的高度、角度去看問題，去思考更深層的意涵，去連接不同問題的共通性（除開某些異質性），相變研究之所以有趣、迷人，除了其多樣性外，上述問題扮演了重要的誘因與挑戰。

參考文獻

1. Z.-D. Bai, C.-C. Chao, H.-K. Hwang, W.-Q. Liang, *Annals of Applied Probability*, **8**, 886 (1998).
2. Z.-D. Bai, H.-K. Hwang, W.-Q. Liang, T.-H. Tsai, *Electronic Journal of Probability*, **6**, 1 (2001).
3. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, *Random Structures and Algorithms*, **19**, 316 (2001)。
4. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, *Algorithmica*, **29**, 44 (2001).
5. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, T.-H. Tsai, *Journal of Algorithms*, to appear (2002).
6. H.-H. Chern, H.-K. Hwang, Y.-N. Yeh, *Random Structures and Algorithms*, **17**, 169 (2000).
7. J. Dongarra, S. Sullivan, *Computing in Science & Engineering*, January / February, 22 (2000).
8. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, v. 1, Wiley (1968).
9. F. A. Haight, *Handbook of the Poisson Distribution*, John Wiley (1967).
10. H.-K. Hwang, *Studies in Applied Mathematics*, **99**, 393 (1997).
11. H.-K. Hwang, *Random Structures and Algorithms*, **13**, 17 (1998).
12. H.-K. Hwang, *Journal of Number Theory*, **69**, 135 (1998).
13. H.-K. Hwang, *Probability and Computing*, **7**, 89 (1998).
14. H.-K. Hwang, *Advances in Applied Probability*, **31**, 448 (1999).
15. 黃顯貴，卜松估計的漸近分析，自然科學簡訊，第十二卷第三期，94 (2000)。

16. H.-K. Hwang, *Annals of Probability*, accepted for publication (2002).
17. H.-K. Hwang, and R. Neininger, *SIAM*

Journal on Computing, accepted for publication (2002).